

Cours No 5.1

Elasticité linéaire

V.Michaud

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne



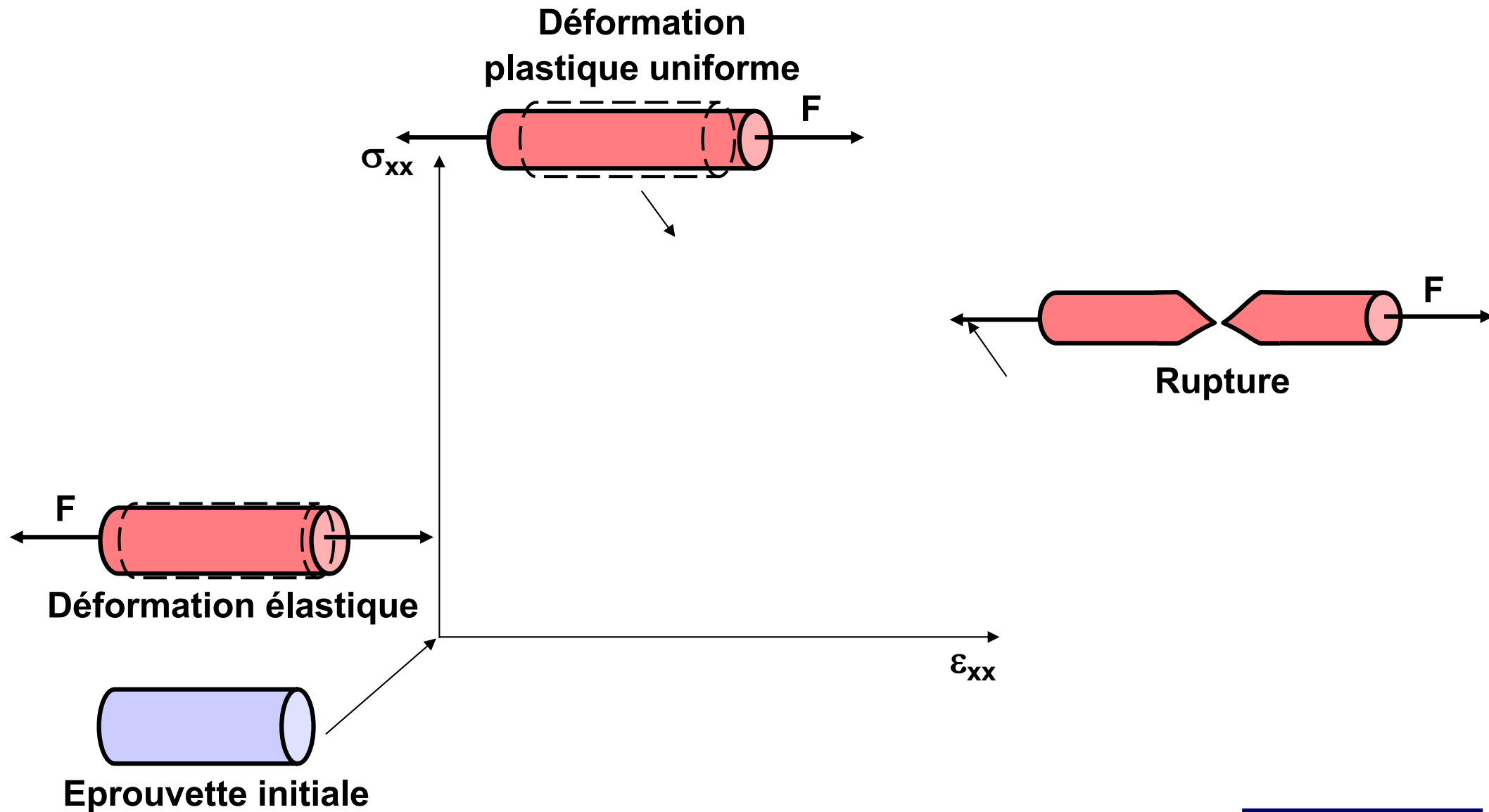
Table des matières

- D'où vient l'élasticité des matériaux?
- Contraintes et déformations
- Exemples de propriétés élastiques des matériaux

Objectifs du cours

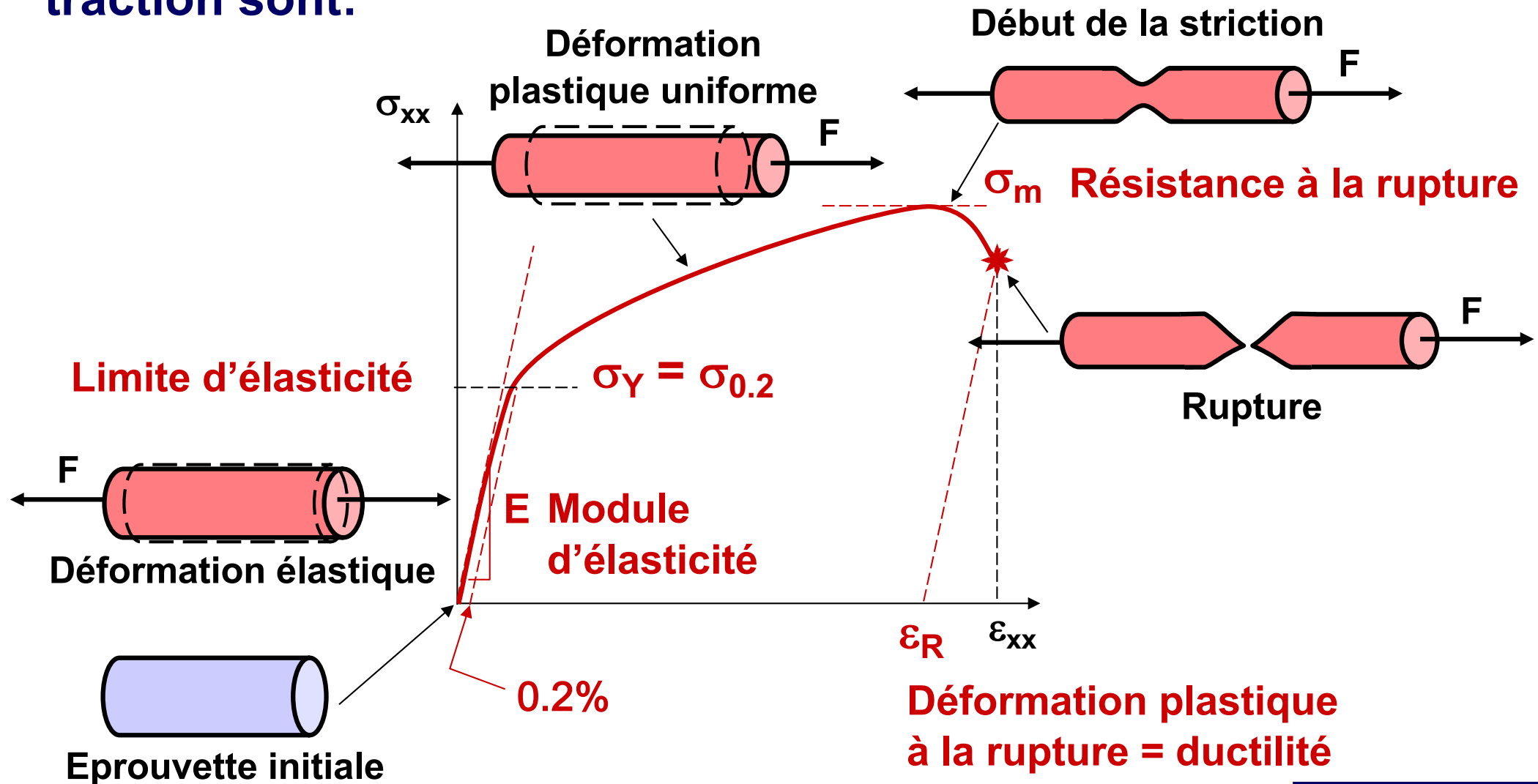
- Voir un test de traction
- Découvrir les propriétés d'élasticité linéaire des matériaux et comprendre d'où elle proviennent.
- Apprendre les cas de chargement en traction/compression.

Test de traction d'un métal



Test de traction d'un métal

Pour un métal typique, les étapes de la déformation en traction sont:



D'où viennent les propriétés élastiques des matériaux?

Rappel: Mis à part les forces de gravitation, toutes les autres forces de la vie "courante" sont de nature électrique.

La rigidité du matériau est directement liée à la structure interne du matériau en question, et au type de liaisons.

Rappel des types de liaisons dans les solides:

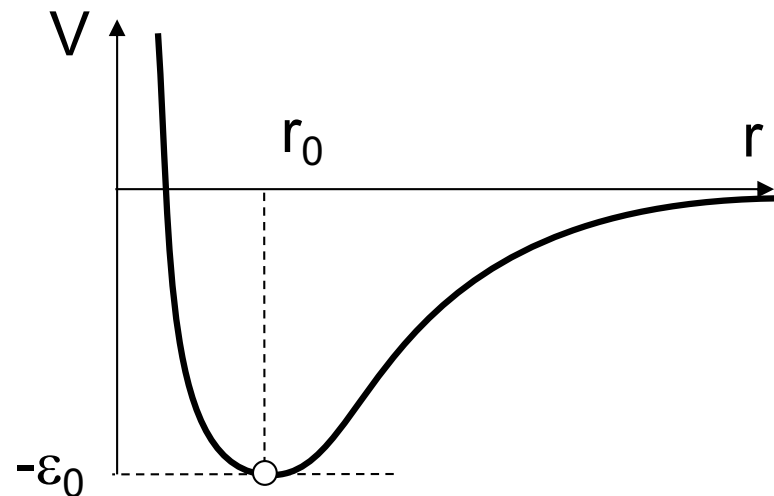
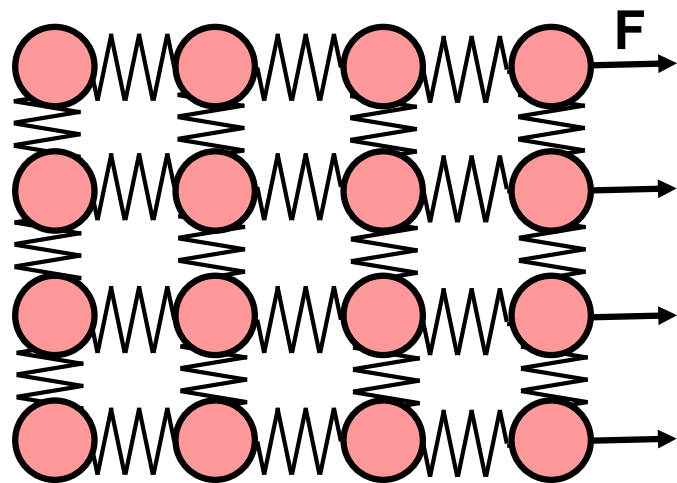
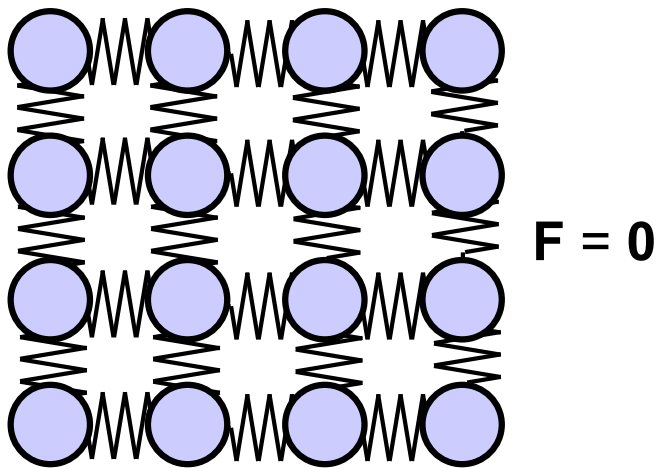
Type de liaison	Energie (kJ/mole)
Ionique	>40
Covalente	300-400
Métallique	>40
Faible	1-40 (400 pour H)

Propriétés élastiques des matériaux cristallins

Pour un cristal, il est aisé de relier les propriétés élastiques aux liaisons interatomiques.

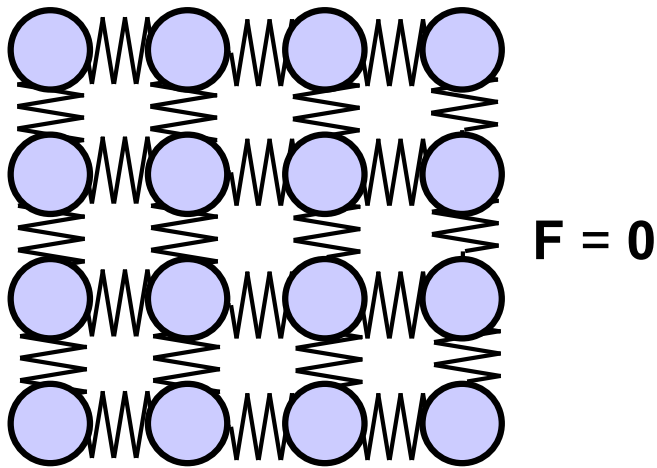
En prenant un potentiel de Lennard-Jones:

$$V = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$



Propriétés élastiques des matériaux cristallins

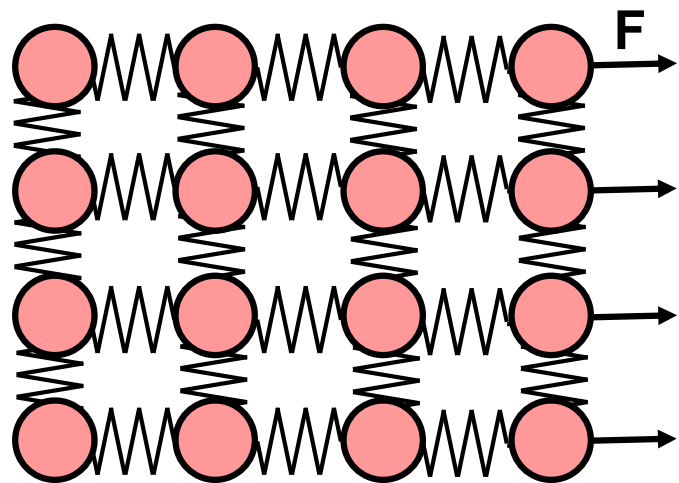
Comment estime-t-on cette raideur ou rigidité E ?



Il faut connaître le concept de contrainte et déformation, présenté aux slides suivantes:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S_x} \quad [\text{Pa} = \text{Nm}^{-2}] \quad \epsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{0x}}$$

E est le rapport entre contrainte et déformation, près de la position d'équilibre r_0 , en considérant que la surface d'application de la force est la surface d'une maille. On voit que plus ϵ_0 est grand (en valeur absolue) et plus r_0 est petit, plus cette rigidité E sera grande.

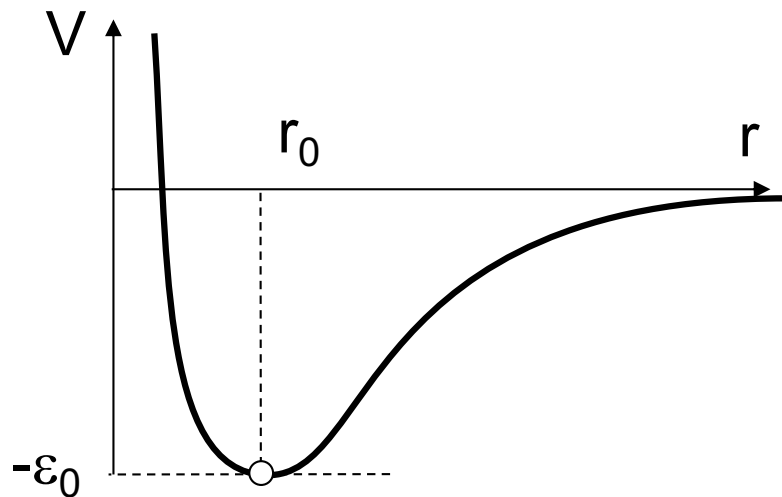


Propriétés élastiques des matériaux cristallins

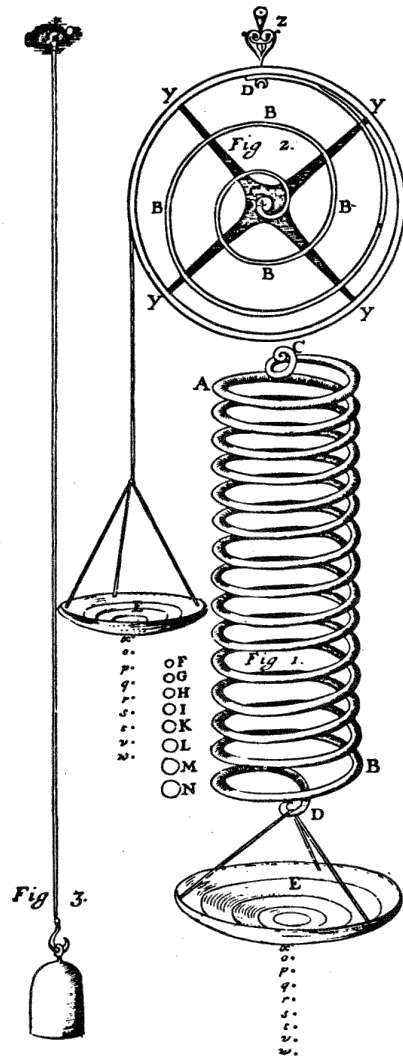
Calcul:

En prenant un potentiel de Lennard-Jones:

$$V = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$



Propriétés élastiques des matériaux

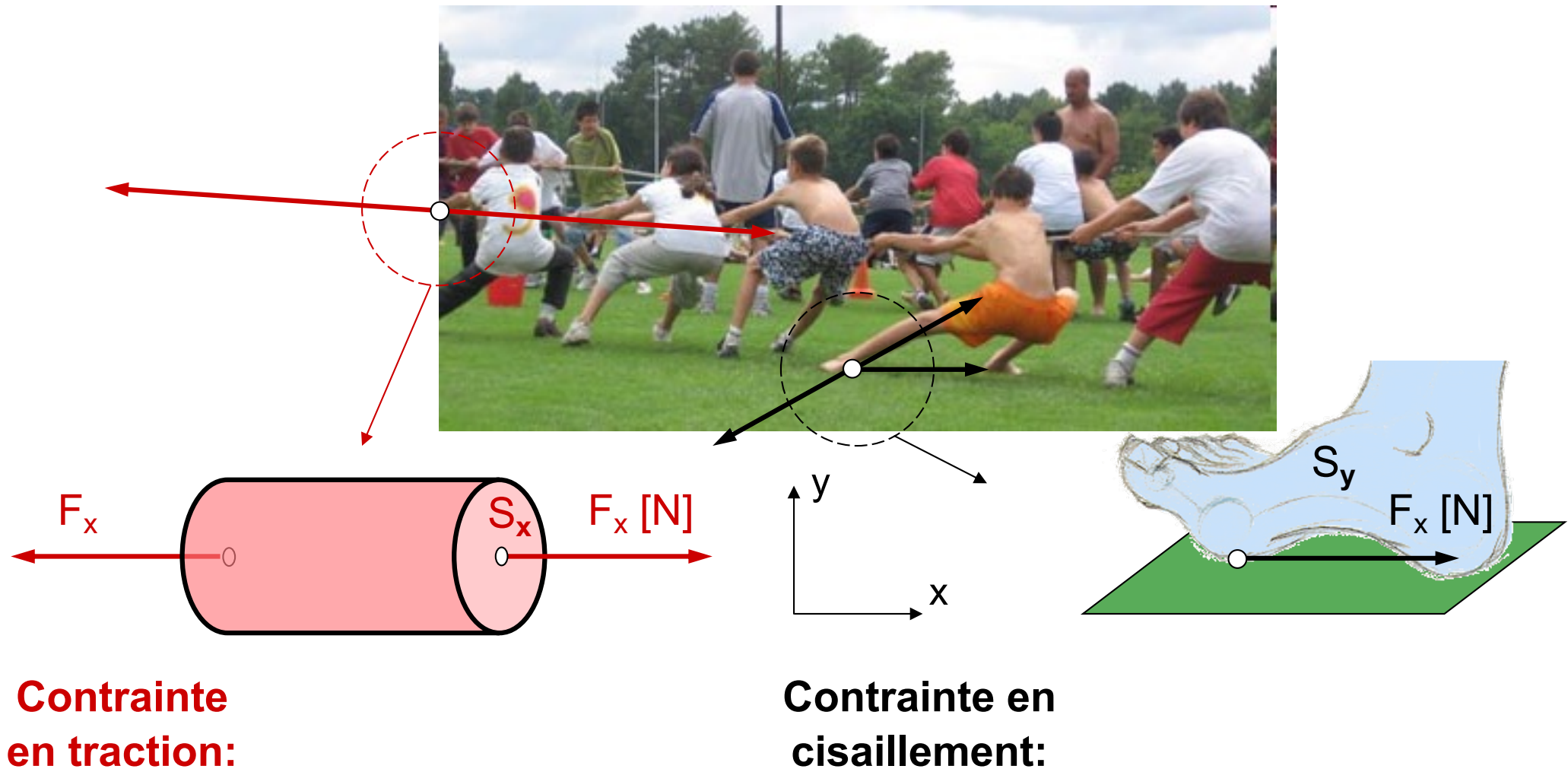


La connaissance de la structure interne de la matière, et du type de liaisons entre les atomes permet donc d'estimer la rigidité des matériaux...

Historiquement, on a procédé bien sur de manière inverse... On a un matériau, on effectue un essai de traction et on enregistre la force qu'il faut appliquer pour imposer une déformation donnée...

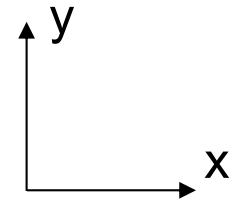
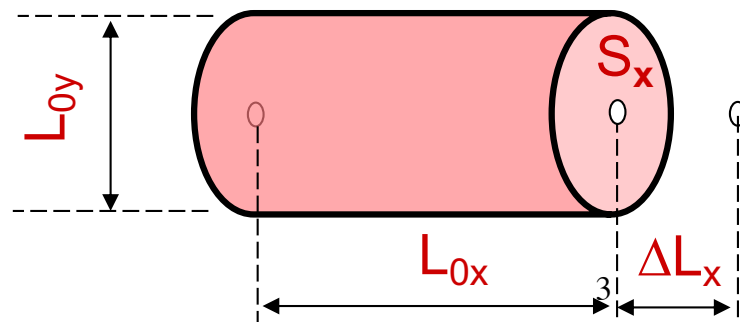
Loi de Hooke (1660): l'allongement est proportionnel à la force.

Définition de: Contraintes



Définition de :Déformations

Lorsqu'un corps est soumis à des forces (**contraintes**) externes, il se **déforme**.



En traction:

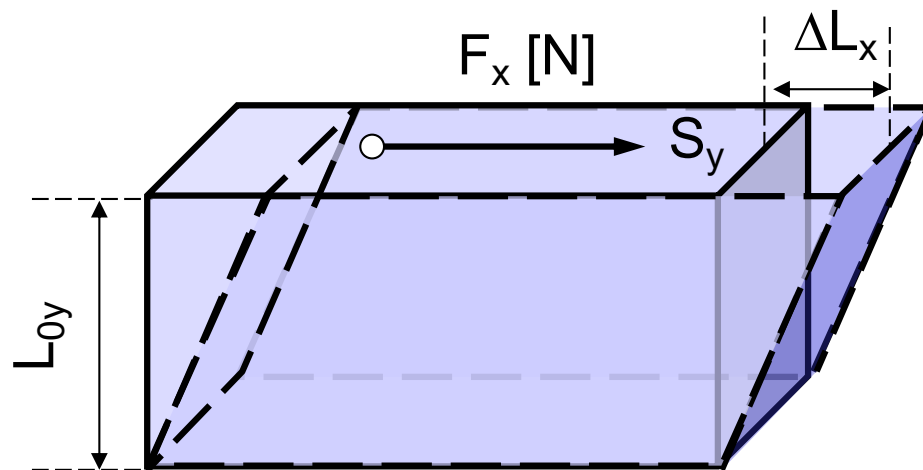
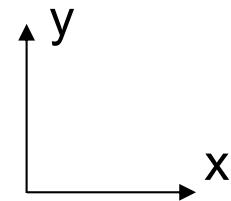
Sans dimension !

Déformations

Lorsqu'un corps est soumis à des forces (**contraintes**) externes, il se **déforme**.

En cisaillement

Sans dimension !



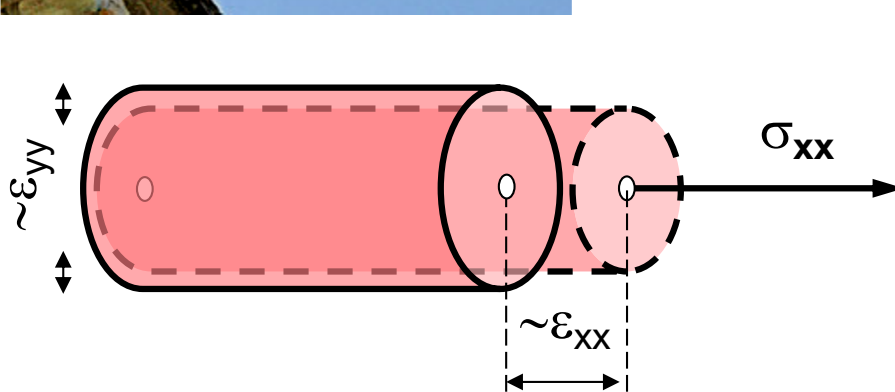
(Facteur $\frac{1}{2}$ par convention pour des raisons que vous verrez plus tard, Physique 3, et γ déformation en cisaillement)

Traction /compression uniaxiale



Dans une gamme de déformation dite **élastique**, un corps soumis à une charge normale se déforme mais revient à sa position originale une fois déchargé (**déformation réversible**).

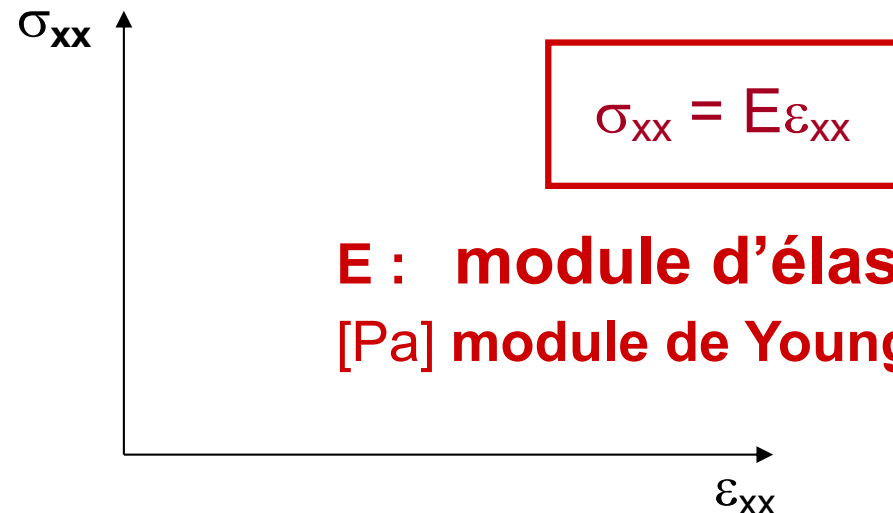
Si la relation entre contrainte et déformation est linéaire, on parle de déformation élastique linéaire.



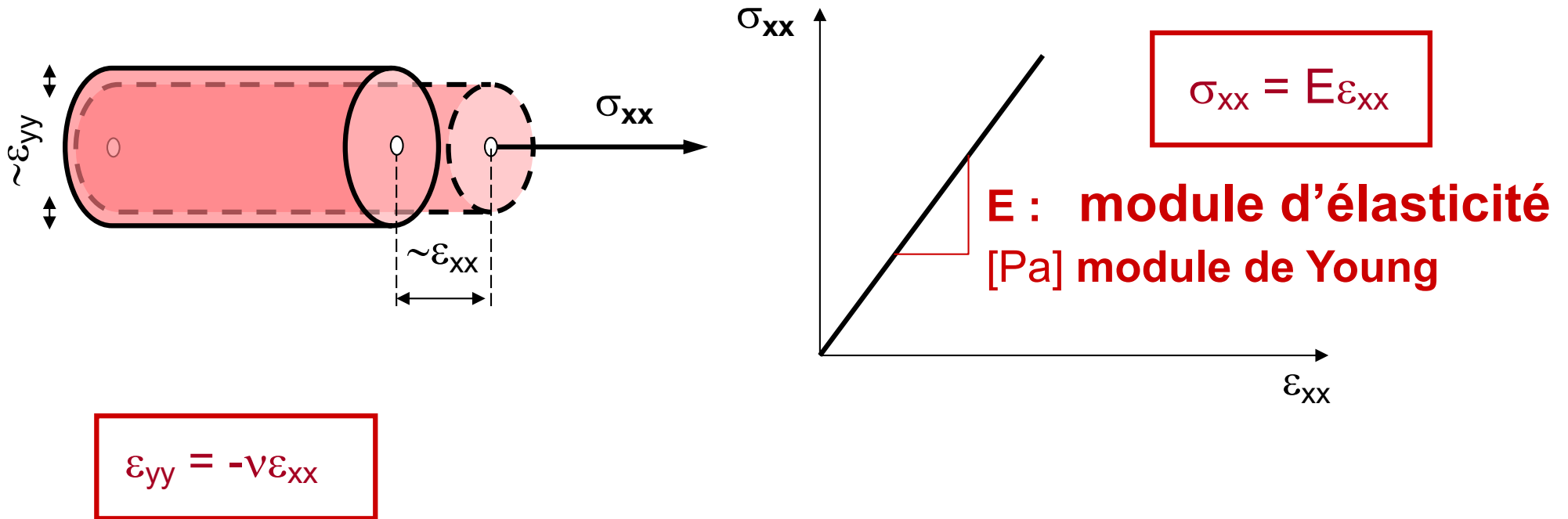
$$\sigma_{xx} = F_x / S_x$$

On observe $F_x = k \Delta l$

15 Alors $\sigma_{xx} = k \Delta l / S_x = k l_0 / S_x \cdot \Delta l / l_0 = E \epsilon_{xx}$



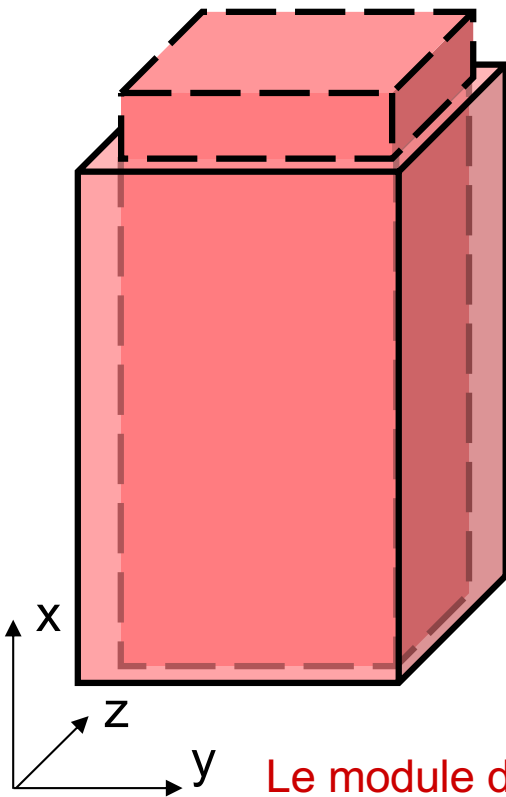
Cas de chargement: Traction/compression uniaxiale



ν : le coefficient de Poisson mesure la contraction latérale lors d'une déformation uniaxiale

Traction/compression uniaxiale

Lors d'une déformation uniaxiale (ou autre), le matériau subit un **changement de volume** donné par:

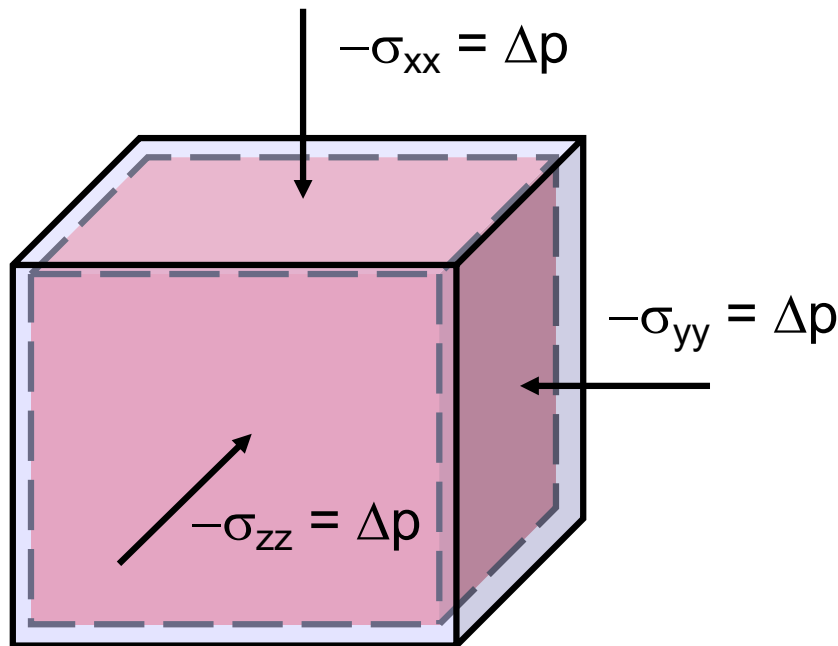


Le module de Poisson est donc ≤ 0.5 .

Le caoutchouc, avec $\nu \cong 0.5$ se déforme élastiquement presque sans changement de volume.

Compression hydrostatique

Une **compression hydrostatique** correspond à une **contrainte normale constante** (négative) sur toute la surface du solide.



On définit le **coefficient de compressibilité** K comme:

$$K = - V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad [\text{Pa}]$$

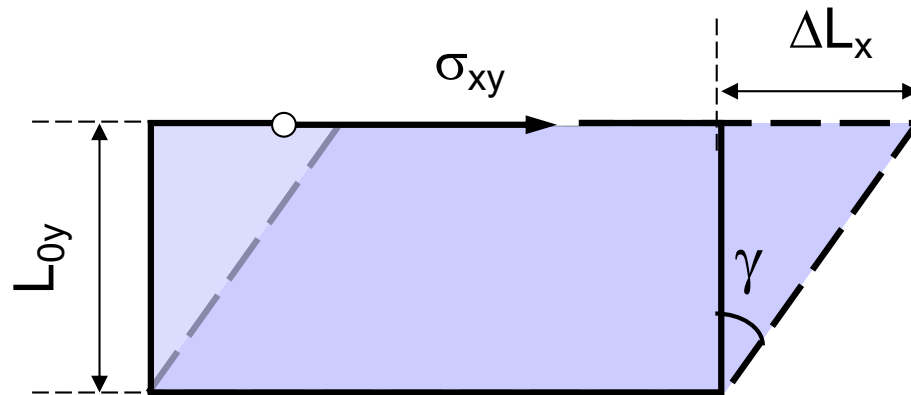
Pour un solide isotrope, on peut montrer que (voir le calcul dans la dernière planche du cours):

$$K = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\nu}$$

Cas de chargement: Cisaillement simple

Un corps soumis à un cisaillement simple élastique permet de définir un **module de cisaillement G**.

$$\sigma_{xy} = G 2\varepsilon_{xy} = G\gamma = G \frac{\Delta L_x}{L_{0y}}$$



Cas de chargement: Cisaillement simple

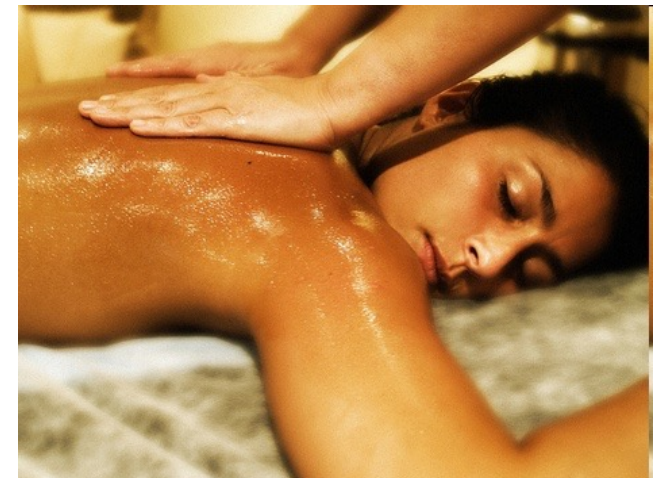
Ces procédés sont-ils du cisaillement? Elastique?



Application de vernis



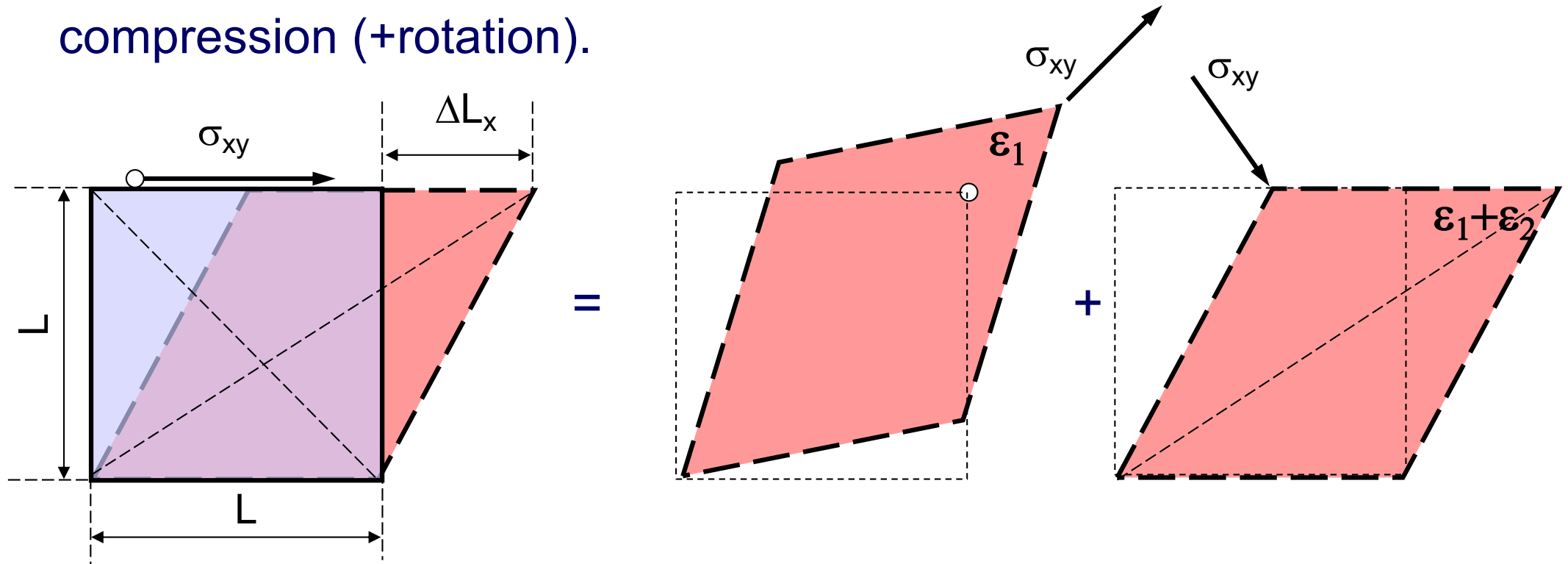
Freinage



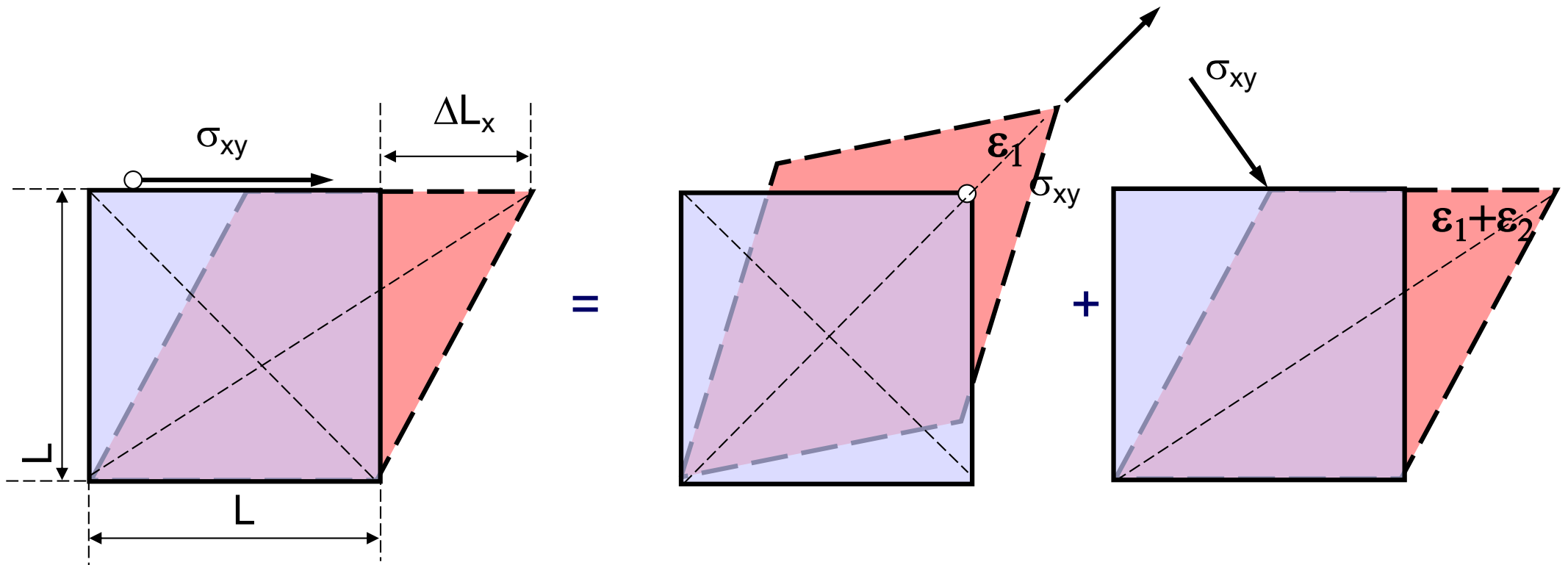
Massage

Relation entre E , ν et G

Pour un solide **isotrope**, E , ν et G ne sont pas indépendants. Une contrainte de cisaillement peut être décomposée en une traction + compression (+rotation).

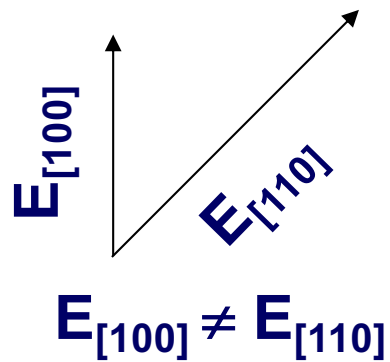


Relation entre E, ν et G

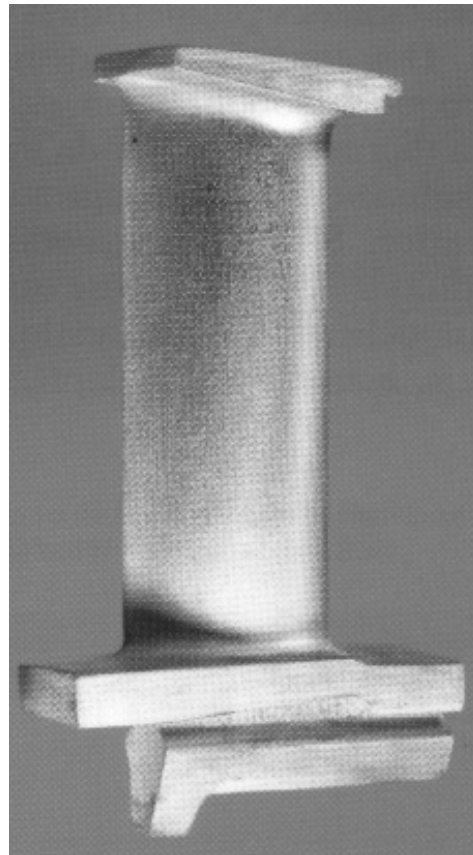


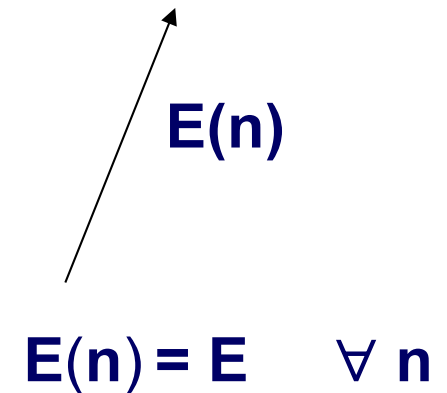
Anisotropie des propriétés élastiques

Les coefficients (E , ν , G) peuvent dépendre de l'orientation et sont donc **anisotropes** (ex. monocristal). Un échantillon polycristallin présente des **propriétés isotropes**.

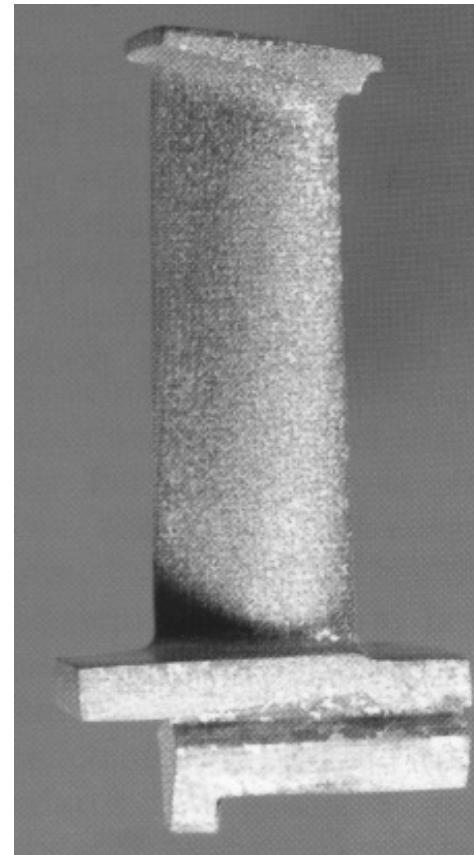

$$E_{[100]} \neq E_{[110]}$$

Aube de turbine
monocristalline



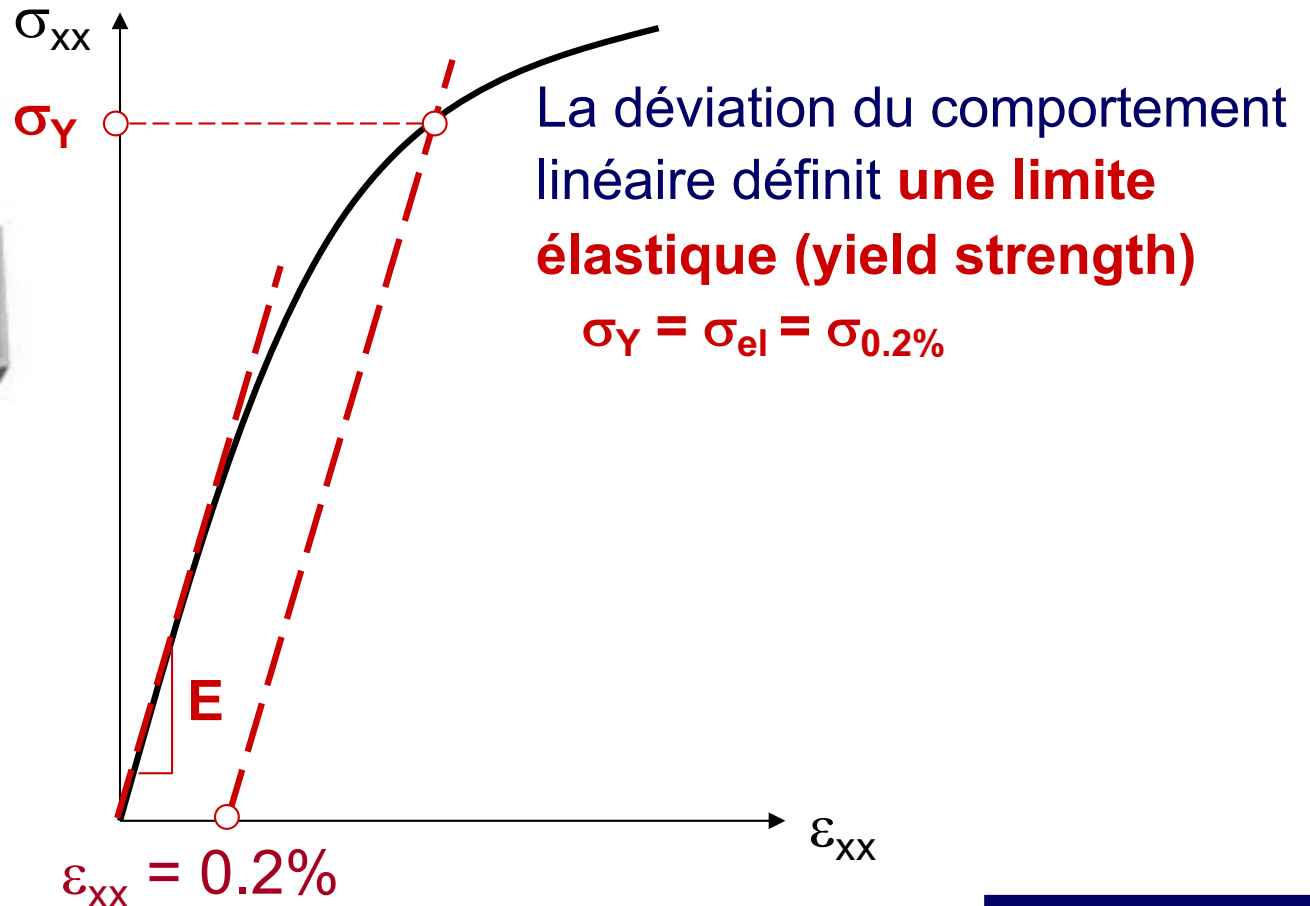

$$E(n) = E \quad \forall n$$

Aube de turbine
polycristalline

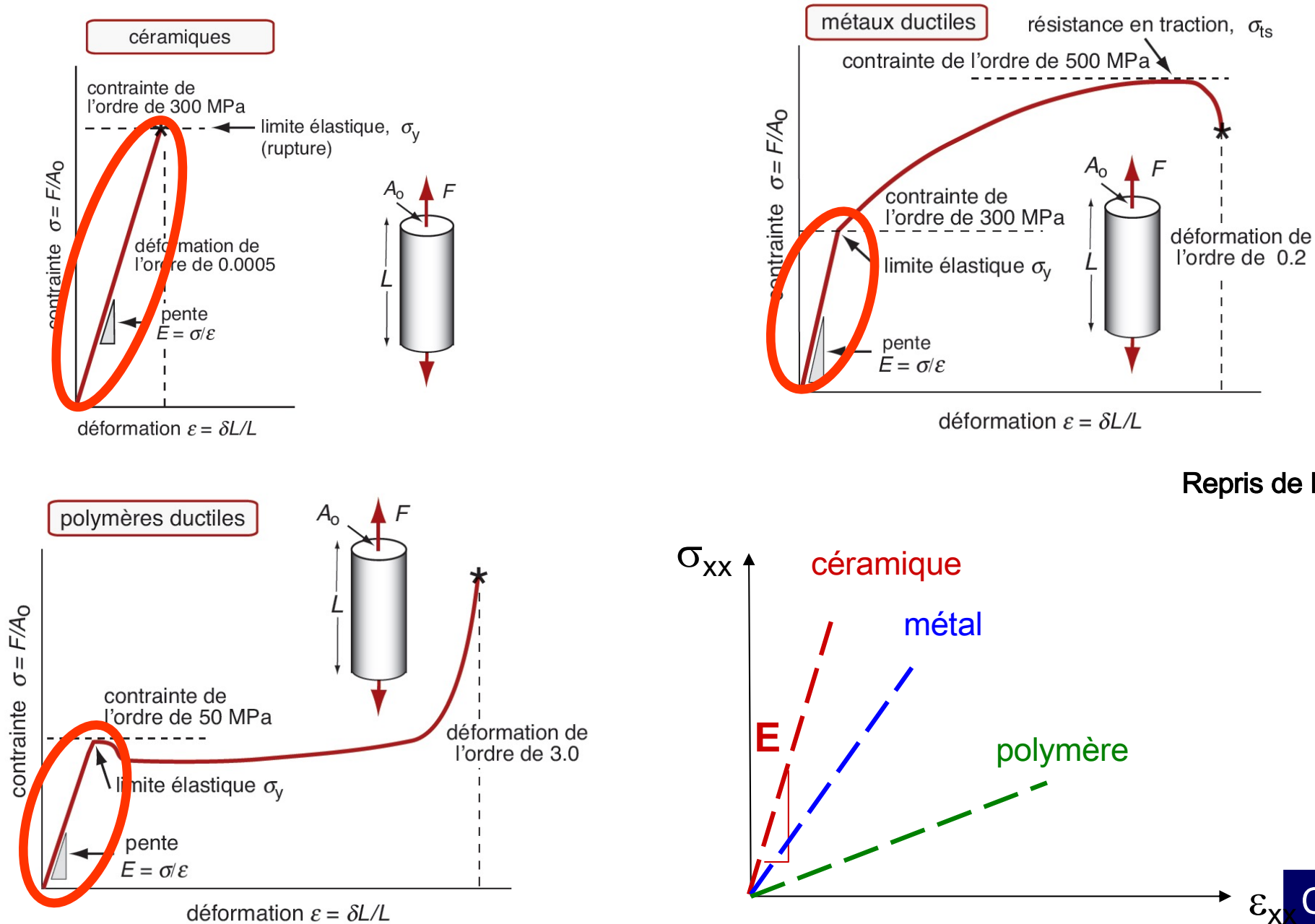


Méthodes de mesure

La mesure du module élastique et du coefficient de Poisson se fait généralement sur une **éprouvette de traction**. On impose un mouvement et on mesure force/allongement par des capteurs.



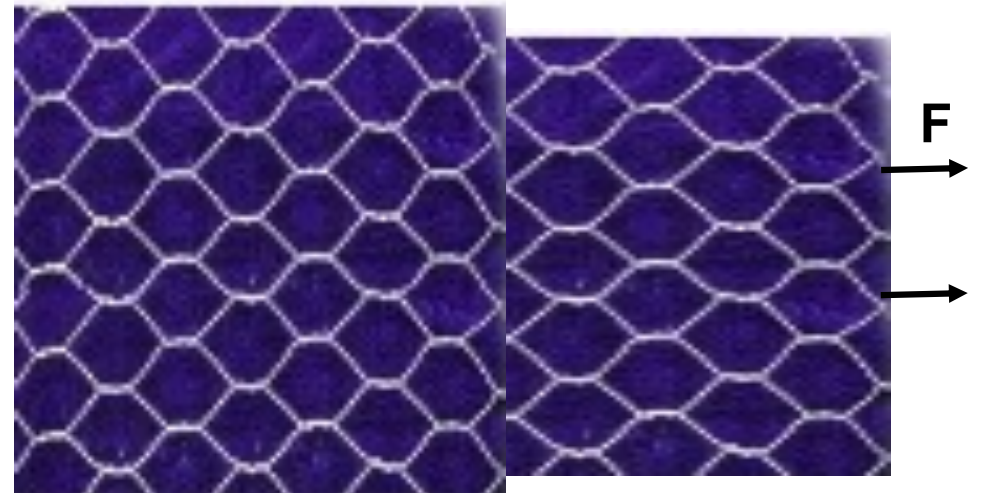
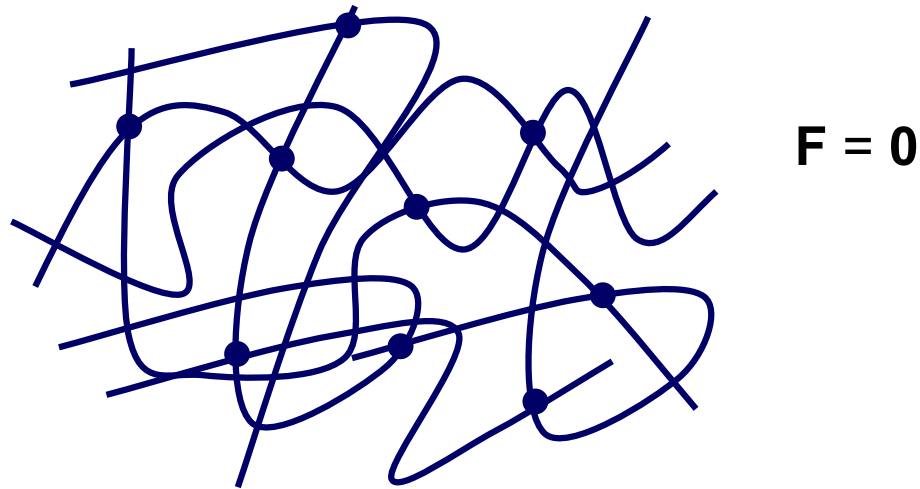
Exemples de comportements



Repris de M. Ashby et al

Elastomères

Pour un élastomère, la déformation élastique a lieu grâce aux ponts entre les molécules, un peu comme un treillis.

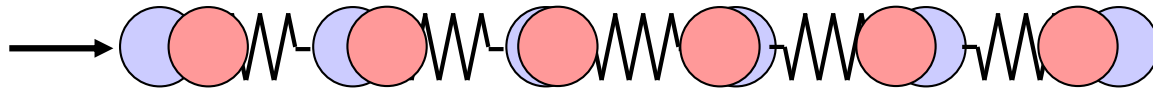


La déformation élastique peut atteindre 1000%. Au-delà d'une limite, tous les ligaments entre ponts sont étirés et le matériau se durcit.

Autre méthode de mesure

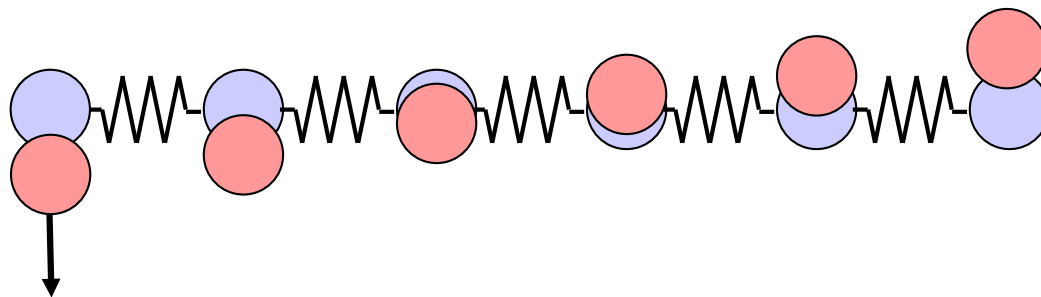
La propagation des **ondes acoustiques** dans un matériau est aussi un moyen de mesurer ses propriétés élastiques.

Ondes **longitudinales** (traction-compression) Vitesse de propagation

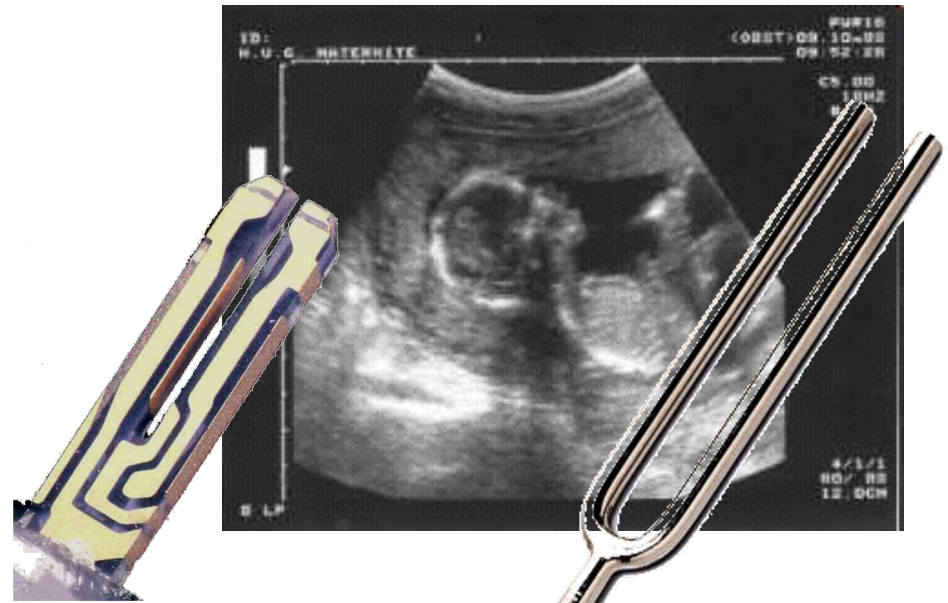


$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ondes **transverses** (cisaillement)



Echographie



Diapason et diapason quartz

Cours No 5.1

Traction/compression uniaxiale

Quelques coefficients:

Matériaux	E [GPa]	ν [-]
Caoutchouc	0.001-0.1	~ 0.5
PTFE (Teflon)	0.5	0.46
Nylon	2 - 4	0.39
Chêne	11	0.3
Béton (en compression)	30	0.2
Aluminium	69	0.33
Verre	50 - 90	0.18 - 0.3
Acier	200	0.3
Saphir (Al ₂ O ₃) axe c	435	0.3
Carbure de silicium (SiC)	450	0.17
Carbure de tungstène (WC)	450 - 650	0.22
Nanotubes de carbone	>1.000	~ 0.2
Diamant	1220	0.1

Résumé

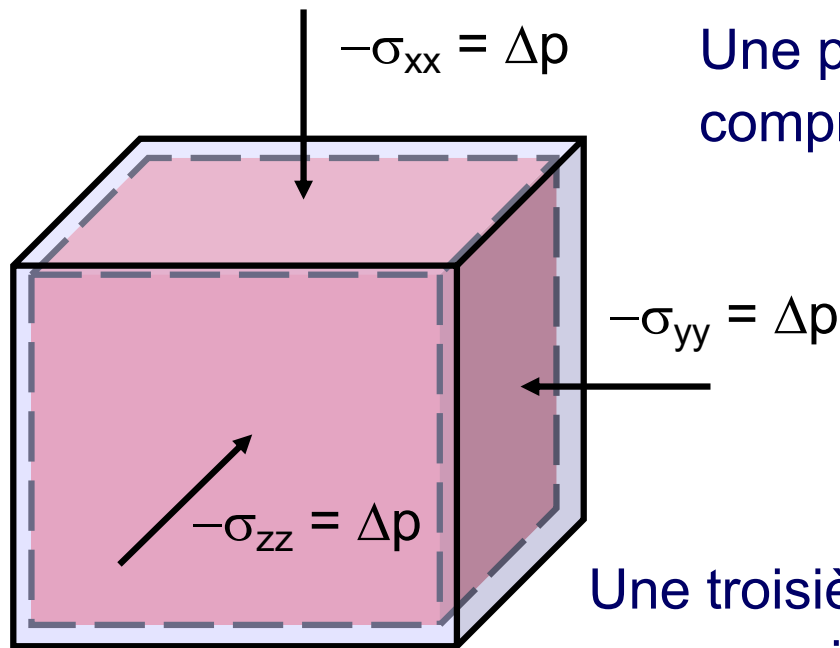
- Le module d'élasticité et le module de cisaillement d'un matériau définissent sa rigidité.
- Les déformations engendrent une variation de volume, qui dépend du module de Poisson!
- Ces propriétés dépendent essentiellement des liaisons inter-atomiques/moléculaires.
- Des tests simples quasi-statiques ou dynamiques (ondes) permettent de déterminer ces propriétés.
- Un matériau est censé être utilisé dans son domaine élastique si on veut retrouver la forme initiale lorsqu'on relâche la contrainte.

A retenir du cours d'aujourd'hui

- *Connaître les définitions de contrainte, déformation, module d'élasticité, coefficient de poisson, coefficient de compressibilité, module de cisaillement.*
- *Savoir retrouver ces éléments sur une courbe de traction*
- *Savoir retrouver le module « idéal » d'un matériau à partir du potentiel de Lennard Jones.*

Compression hydrostatique- Démonstration

On peut décomposer la pression en trois temps:



Une première
compression selon x:

$$\begin{array}{lll} L_{0x} & \rightarrow & L_{0x}(1 + \varepsilon_{xx}) = L_{0x}(1 + \varepsilon_{xx}) \\ L_{0y} & \rightarrow & L_{0y}(1 + \varepsilon_{yy}) = L_{0y}(1 - \nu\varepsilon_{xx}) \\ L_{0z} & \rightarrow & L_{0z}(1 + \varepsilon_{zz}) = L_{0z}(1 - \nu\varepsilon_{xx}) \end{array}$$

Une seconde compression selon y:

$$\begin{array}{lll} L_{0x}(1 + \varepsilon) & \rightarrow & L_{0x}(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon) \\ L_{0y}(1 - \nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0y}(1 - \nu\varepsilon)(1 + \varepsilon) \\ L_{0z}(1 - \nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0z}(1 - \nu\varepsilon)(1 - \nu\varepsilon) \end{array}$$

Une troisième
compression selon z:

$$\begin{array}{lll} L_{0x}(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0x}(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)(1 - \nu\varepsilon) \\ L_{0y}(1 - \nu\varepsilon)(1 + \varepsilon) & \rightarrow & L_{0y}(1 - \nu\varepsilon)(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon) \\ L_{0z}(1 - \nu\varepsilon)(1 - \nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0z}(1 - \nu\varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)(1 + \varepsilon) \end{array}$$

En reportant sur
les volumes:

$$\begin{array}{ll} V_0 & = L_{0x}L_{0y}L_{0z} \\ V & = L_{0x}L_{0y}L_{0z}(1 + (1 - 2\nu)\varepsilon)^3 = V_0(1 + (1 - 2\nu)\varepsilon)^3 \end{array}$$

$$K = -\frac{V_0}{\Delta V}\Delta p = -\frac{V_0}{V - V_0}\Delta p = -\frac{V_0}{V_0(1 + 3(1 - 2\nu)\varepsilon - 1)}\Delta p = \frac{-\Delta p}{3(1 - 2\nu)\varepsilon}$$

soit

$$K = \frac{1}{3(1 - 2\nu)} \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$